

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ. СВЯЗЬ КООРДИНАТ. ВЫСОТЫ

Сила тяжести и ее потенциал. Сила тяжести является равнодействующей сил притяжения и центробежной силы. Массы Земли притягиваются также Луной и Солнцем, однако их влияние не превышает десятимиллионной доли и рассматривается лишь как возмущение силы тяжести.

Со времен И. Ньютона в вопросах определения фигуры Земли много внимания уделялось изучению силы тяжести. В 1743 г. А.К. Клеро (Alexis Claude Clairault, 1713-1765), математик, механик, астроном, участник французской экспедиции в Лапландию, показал, как сила тяжести изменяется с широтой места наблюдения и как вычислить сжатие Земли α из разности сил тяжести на экваторе и на полюсе. Его исследования положили начало физическому методу определений параметров фигуры Земли.

В теории фигуры Земли полагают, что притягиваемая материальная точка имеет массу $m = 1$. По второму закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение. При единичной массе сила численно равна ускорению и для краткости письма эти понятия можно не различать.

Земля вращается с угловой скоростью ω ; на ее точки массы $m = 1$, расположенные на расстоянии r от оси вращения, влияет центробежная сила, направленная по перпендикуляру от оси вращения вдоль единичного вектора \mathbf{r}^0 :

$$g_p = r\omega^2 \mathbf{r}^0, \quad (7.1)$$

Согласно закону всемирного тяготения сила притяжения двух материальных точек прямо пропорциональна гравитационной постоянной G , притягивающей массе M , притягиваемой массе $m = 1$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния ρ между ними:

$$g_F = -\frac{GM}{\rho^2} \mathbf{r}^0.$$

Единичный вектор \mathbf{r}^0 направлен против силы притяжения. Этот выбор определяет в формуле знак минус.

С векторными функциями работать трудно и неудобно. Для удобства вводят скалярные функции, а именно такие, производные от которых по любому направлению определяют проекцию силы на это направление. Их называют *потенциалами*. Для потенциала Q центробежной силы и потенциала V_F силы притяжения материальной точки можно записать:

$$Q = \frac{1}{2} \omega^2 r^2, \quad (7.2)$$

$$V_F = \frac{GM}{\rho}. \quad (7.3)$$

Легко проверить, что производные от данных функций по направлениям действия сил (по r и ρ) определяют эти силы.

Формула (7.3) верна для тел, общая масса M которых сосредоточена в материальной точке, в однородном шаре или в шаре из однородных концентрических слоев. Земля обладает более сложным строением. Ньютона, считая Землю по плотности однородной, для ее сжатия получил 1/230. Нидерландский механик, физик, математик Х. Гюйгенс (Christiaan Huygens, 1629-1695) предположил, что массы Земли предельно неоднородны, сосредоточены в центре, и нашел сжатие равным 1/576. Действительное значение сжатия находится между

этими величинами и свидетельствует о неоднородном строении Земли и убывании плотности ее вещества от центра к поверхности.

Определим потенциал сил притяжения реальной Земли, воспользовавшись свойством суперпозиции потенциалов: *потенциал равнодействующей силы, создаваемой множеством сил, равен сумме потенциалов этих сил*. Представим Землю состоящей из непрерывного множества точечных элементарных масс dM и суммируем их потенциалы сил притяжения. В пределе суммирование заменяется интегрированием. Учитывая формулу (7.3), для потенциала V силы притяжения Земли получим:

$$V = G \int_M \frac{dM}{\rho}. \quad (7.4)$$

Знак \int_M обозначает интегрирование по всему объему Земли.

На основе свойства суперпозиции для потенциала силы тяжести Земли W получаем:

$$W = V + Q.$$

Производная потенциала W по некоторому направлению s равна проекции силы тяжести g на это направление:

$$\frac{dW}{ds} = g \cos(gs) = g_s.$$

Производная по направлению силы тяжести равна самой силе g .

Понятие об измерениях силы тяжести. Методы измерений силы тяжести бывают:

- *Динамические* – измеряется время движения тела в гравитационном поле.
- *Статистические* – измеряется вес тела в разных точках земли.

Кроме того, все эти методы подразделяют на две группы:

- *Относительные* – измеряется приращение значений сил тяжести между двумя пунктами.
- *Абсолютные* – на пункте получают полное значение силы тяжести g .

По физическому принципу действия отметим следующие измерительные устройства:

- *Баллистические* – измеряется длина пути и время падения грузика (призмы).
- *Маятниковые* – базируются на измерении периода колебаний маятника.
- *Гравиметры* – пружинные весы высокой точности, способные фиксировать малейшие перемещения подвешенного грузика.
- *Струнные* – фиксируются изменения частоты колебаний струны, натянутой грузом с постоянной массой.

За единицу измерения ускорения силы тяжести в системе СИ принят 1 м/с^2 ; однако в гравиметрии обычно пользуются системой, в которой единицей силы тяжести является Гал, равный 1 см/с^2 . На практике применяют единицы, уменьшенные в тысячу и миллион раз, – *мГал* и *мкГал*. Названия единиц даны в честь итальянского физика, механика, астронома, философа и математика Галилео Галилея (Galileo Galilei, 1564-1642). При переводе единиц измерений в СИ используется соотношение: $1 \text{ мГал} = 10^{-5} \text{ м/с}^2$.

Измерения силы тяжести относятся к числу весьма точных измерений.

Уровенные поверхности. Геоид. Если в поле силы тяжести переместить материальную точку единичной массы на бесконечно малый отрезок ds по направлению, составляющему угол (gs) с направлением действия силы тяжести g , то потенциал W изменится на бесконечно малую величину

$$dW = g_s ds.$$

Таким образом, приращение потенциала есть работа, совершаемая силой при перемещении единичной точечной массы в поле силы тяжести. Рассмотрим случай перемещения точки в направлении, перпендикулярном отвесной линии. Тогда

$$\cos(gs) = 0 \text{ и } dW = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$W = \text{const.}$$

Это есть уравнение некоторой поверхности, в любой точке которой сила тяжести направлена по нормали к ней, т.е. по отвесной линии. Работа силы при перемещении массы по этой поверхности равна нулю ($dW = 0$). Такую поверхность называют *эквипотенциальной, уровенной*, другое ее название *геоп*. Уровенных поверхностей бесчисленное множество. Если константе в уравнении поверхности придать некоторое числовое значение, то будет выделена определенная эквипотенциальная поверхность.

Если константе придать такое значение W_0 , чтобы уровенная поверхность совпадала с поверхностью невозмущенной воды Мирового океана, то получим так называемую *основную уровенную поверхность*. Тело, ограниченное этой поверхностью, называют *геоидом*. Понятие такого геоида ввел в 1873 г немецкий физик Й.Б. Листинг (1808-1882). В этом направлении вместе с Й.Б. Листингом работал немецкий ученый К.Ф. Гаусс (1777–1855), поэтому упомянутое тело также называют геоидом Гаусса-Листинга.

Геоид представляет фигуру Земли, сглаженную до уровня Мирового океана. В действительности нет единого уровня морей и океанов, фиксирующих на Земле положение основной уровенной поверхности. Поэтому в природе геоид физически нигде и никак не зафиксирован.

Интересная информация по этому поводу имеется в статье [10], где можно узнать, что немецкий математик, астроном, работавший также в области теоретической геодезии, Г. Брунс (Ernst Heinrich Bruns, 1848 – 1919) определил поверхность геоида как уровенную поверхность, проходящую через исходный пункт нивелирной сети; французский и американский физик Л. Бриллюэн (Léon Nicolas Brillouin, 1889-1969) ввёл понятие геоида, поверхность которого проходит на высоте около 10 км над уровнем моря через вершину самой высокой горы Земли; в общем поверхностью геоида может служить любая уровенная поверхность, пересекающая поверхность Земли.

При перемещении материальной точки единичной массы на отрезок dh по отвесной линии в направлении, противоположном действию силы тяжести, получим

$$dW = -gdh \text{ и } dh = -dW / g \quad (7.5)$$

Эти уравнения служат для введения на Земле системы счета высот.

Сила тяжести изменяется по поверхности Земли, во-первых, за счет изменения центробежной силы, равной нулю на полюсах и достигающей максимума на экваторе, во-вторых, за счет сплюснутости Земли и, в-третьих, из-за аномального распределения масс. Сила тяжести увеличивается от экватора к полюсам примерно на 5 Гал, а ее аномальные изменения могут достигать десятых долей Гала.

Ускорение силы тяжести $g > 0$. Из уравнений (7.5) следует, что смежные эквипотенциальные поверхности не параллельны — они, нигде не пересекаясь, сближаются у полюсов и несколько расходятся по мере движения к экватору.

Модель гравитационного поля Земли. Нормальная Земля. Уровенные поверхности силы тяжести имеют сложный вид. Для решения теоретических и практических задач необходима модель гравитационного поля Земли. Для этого потенциал W силы тяжести представляют суммой нормального и аномального потенциалов:

$$W = U + T \quad (7.6)$$

где U — *нормальный потенциал*, создаваемый моделью, он содержит главную часть потенциала силы тяжести Земли, T — *возмущающий или аномальный потенциал*, небольшая добавка. Эту модель называют *нормальной Землей; сфероп* — ее уровенная поверхность $U = \text{const.}$

Правомерность такой постановки основана на теореме английского математика и физика Д.Г. Стокса (George Gabriel Stokes; 1819-1903), по которой, если известны масса тела, угловая скорость его вращения около неизменной оси и задана форма внешней уровенной поверхности, охватывающей все притягивающие массы, то потенциал и сила тяжести могут быть определены однозначно как на поверхности, так и во внешнем пространстве. В качестве физической модели нормальной Земли используют земной эллипсоид вращения. Его называют *уровенным эллипсоидом*.

Для описания нормального поля и потенциала силы тяжести W нужны математические формулы. Формула потенциала центробежной силы Q имеет простой вид. Трудности возникают с определением потенциала силы притяжения V . Его вычисления по формуле (7.4) не могут быть выполнены, так как нет достаточно точных и детальных сведений о строении Земли. Обычно его задают двумя способами: набором так называемых эмпирических *гармонических коэффициентов* и некоторой системой *точечных масс*.

Гармонические коэффициенты. Формула (7.4) потенциала притяжения V раскладывается в ряд по так называемым шаровым функциям. При этом, если масса Земли равна M , ее экваториальный радиус равен a , то потенциал силы притяжения точки, находящейся во внешнем пространстве или на Земле и имеющей геоцентрические координаты ρ — радиус-вектор, Φ — широта и L — долгота, вычисляется по формуле:

$$V = \frac{GM}{\rho} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \left(\bar{C}_{nm} \cos(mL) + \bar{S}_{nm} \sin(mL) \right) \bar{P}_{nm}(\sin \Phi) \right]. \quad (7.7)$$

В данном выражении \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} — безразмерные, нормированные, так называемые гармонические коэффициенты, $\bar{P}_{nm}(\sin \Phi)$ — известные нормированные функции от $\sin \Phi$ (так называемые присоединенные полиномы Лежандра степени n и порядка m). Предполагается, что начало координат совмещено с центром масс, а координатные оси — с главными осями инерции Земли. По этим причинам суммирование начинают от $n = 2$. Соответствующие функции и коэффициенты при них называют *зональными*, когда $m = 0$, *секториальными*, если $m = n$, остальные — *тессеральными*.

Зональные гармонические коэффициенты обозначают также как J_n . При этом:

$$J_n = -\bar{C}_{n0} \sqrt{2n+1}.$$

Зональные гармонические коэффициенты характеризуют гравитационное поле Земли по зонам между параллелями, секториальные — по секторам между меридианами, тессеральные — по трапециям между меридианами и параллелями. Чем больше n и m , тем меньше зоны, сектора, трапеции и тем детальнее описание гравитационного поля.

Гармонические коэффициенты определяют по результатам наблюдений искусственных спутников Земли, либо по измерениям силы тяжести. Оба метода дополняют друг друга. До запуска искусственных спутников Земли надежно был известен лишь самый крупный коэффициент — \bar{C}_{20} (J_2). Наблюдения орбит спутников позволили найти ряд других коэффициентов. Орбиты спутников определяются гравитационным полем Земли. Если бы Земля была правильным однородным шаром или состояла из однородных концентрических сферических слоев, то ИСЗ перемещались строго по законам Кеплера. Орбитой был бы эллипс, в одном из

фокусов которого расположен центр масс Земли. Она неподвижно лежала бы в плоскости, занимающей неизменное положение в космическом пространстве. В действительности траектории движений ИСЗ более сложные. Полярное сжатие Земли поворачивает плоскость орбиты и вращает орбиту в этой плоскости. Асимметрия северного и южного полушарий и другие неоднородности в строении Земли тоже оказывают свое влияние. Определения положений спутников в космическом пространстве и измерения их высот над морем позволили найти многие гармонические коэффициенты.

Спутники реагируют лишь на самые заметные неоднородности в строении Земли. Поэтому точность коэффициентов понижается с повышением их степени и порядка. Для детального изучения гравитационного поля привлекают наземные и морские измерения силы тяжести. В настоящее время используют коэффициенты выше 2000-й степени и порядка.

Анализируя их, можно получить представление о форме Земли. Самый большой из коэффициентов $|\bar{C}_{20}| < 0,001$; остальные коэффициенты меньше его в сотни и тысячи раз. Если пренебречь всеми коэффициентами, то формула (7.7) совпадет с выражением (7.3), определяющим потенциал, который создавала бы Земля, состоящая из однородных концентрических сферических слоев. Это близко к истине, так как Земля имеет внутреннее ядро, ядро, оболочку или мантию и слой, называемый земной корой.

При сохранении лишь зональных коэффициентов функция V потенциала силы притяжения перестает зависеть от долгот L . Таким образом, зональные коэффициенты определяют гравитационный потенциал тела вращения. Земля по форме близка к телу вращения. Самый большой зональный коэффициент $\bar{C}_{20} (J_2)$ обусловлен полярным сжатием Земли. Зональные коэффициенты с четными индексами соответствуют телу вращения, симметричному относительно плоскости экватора. Наличие зональных коэффициентов с нечетными индексами говорит о некоторой асимметрии северного и южного полушарий Земли.

Потенциал силы притяжения уровня эллипсоида, симметричного относительно экватора, можно представить формулой лишь с четными зональными коэффициентами:

$$V_E = \frac{GM}{\rho} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho} \right)^{2n} \bar{C}_{2n} \bar{P}_{2n}(\sin \Phi) \right]. \quad (7.8)$$

На практике в выражении (7.8) вместо бесконечной суммы обычно оставляют лишь коэффициенты \bar{C}_{20} и \bar{C}_{40} . При этом полиномиальные функции от $\sin \Phi$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{20} &= \frac{\sqrt{5}}{2} (3 \sin^2 \Phi - 1), \\ \bar{P}_{40} &= \frac{3}{8} (35 \sin^4 \Phi - 30 \sin^2 \Phi + 3). \end{aligned}$$

Для нормального потенциала силы тяжести, с учетом формулы Q (7.2), имеем:

$$U = V_E + Q.$$

Фундаментальные геодезические постоянные. Геометрической моделью нормальной Земли является эллипсоид вращения. Центр эллипсоида совмещают с центром масс, а его ось вращения — с осью вращения Земли. У эллипсоида экваториальная полуось a , произведение гравитационной постоянной на массу GM , угловая скорость вращения ω и зональный коэффициент $\bar{C}_{20} (J_2)$ должны быть такими же, как и у реальной Земли. Взамен полуоси a может быть задан потенциал U_0 на эллипсоиде. При этом требуют, чтобы объем эллипсоида равнялся объему геоида.

Параметры a , GM , ω , $\bar{C}_{20} (J_2)$, а также скорость электромагнитных волн в вакууме c , называют *фундаментальными геодезическими постоянными*. Включение константы c в число фундаментальных постоянных обусловлено тем, что в современных условиях длины линий

определяют при помощи светодальномеров или радиодальномеров по времени и скорости распространения электромагнитных волн. Константа c устанавливает масштаб линейных построений. Таким образом, фундаментальные постоянные однозначно определяют нормальную Землю и масштаб геодезических построений на физической поверхности.

По фундаментальным геодезическим постоянным вычисляют сжатие уровня эллипсоида α , его малую полуось b , значения нормальной силы тяжести γ_e на экваторе и γ_p на полюсе, и потенциал силы тяжести на его поверхности U_0 . Силу тяжести в нормальном поле определяет производная от потенциала U по нормали к сферопу. Ее значение γ_0 на эллипсоиде вычисляют по формуле Сомильяна:

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}.$$

Часто эту формулу упрощают и дают, например, в следующем виде:

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B),$$

указывая числовые значения коэффициентов β и β_1 . На высоте H метров по нормали над эллипсоидом сила тяжести γ равна:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{d\gamma}{dH} H \approx \gamma_0 - \frac{2\gamma}{\rho} H \approx \gamma_0 - 0,3086H \text{ (мГал).} \quad (7.9)$$

Числовой коэффициент получен при средних для Земли значениях γ и ρ .

В разных координатных системах отсчета фундаментальные геодезические постоянные, естественно, несколько различаются. Ниже, в табл. 7.1, в качестве примера приводятся фундаментальные геодезические постоянные и некоторые производные параметры для геодезической системы *GRS-80* [23].

Точечные массы. Наряду с моделями гравитационного поля Земли в виде гармонических коэффициентов геопотенциала используются также модели в виде систем точечных масс. Эти модели позволяют более оперативно выполнять некоторые геодезические и навигационные расчеты. С этой целью в теле Земли "размещают" в определенных точках некоторое количество точечных масс. Масса M_i каждой точки составляет долю ε_i от общей массы M Земли. Потенциал притяжения точечной массы определяется формулой (7.3). Потенциал притяжения, создаваемый всеми точечными массами, равен сумме их потенциалов:

$$V = GM \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i}{\rho_i},$$

где N — число точечных масс, ρ_i — расстояние от рассматриваемой точки до текущей точки точечной массы. Число точек, их расположение и массу подбирают так, чтобы создаваемое ими поле совпадало соответственно с реальным, нормальным или возмущающим полем.

Возмущающий потенциал. Возмущающий потенциал определяет аномальное поле и равен разности реального и нормального гравитационных потенциалов:

$$T = W - U = V - V_E.$$

Потенциалы V и V_E устанавливают с помощью гармонических коэффициентов. Возмущающий потенциал есть небольшая добавка к нормальному значению. Отношение потенциалов T/W составляет около 0,001%. Наличие аномального поля означает, что реальная сила тяжести g не совпадает с нормальной силой тяжести γ , как по величине, так и по направле-

нию, и обе они отклонены от нормали к эллипсоиду. Эти различия изучают по *аномалиям силы тяжести и уклонениям отвесных линий*.

Аномалии силы тяжести. Аномалией силы тяжести называют разность между измеренной величиной силы тяжести g и ее нормальным значением γ :

$$\Delta g = g - \gamma.$$

Если γ вычислено по формуле (7.9), то Δg называют *аномалией в свободном воздухе*. Если при этом g и γ отнесены к одной и той же высоте H , то аномалию называют *чистой*, иначе — *смешанной*. Иногда вводят поправку (редукцию) за *рельеф*, учитывающую отступления физической поверхности Земли от уровенной. Смешанные аномалии силы тяжести в свободном воздухе, а также исправленные за рельеф применяют в исследованиях, связанных с изучением фигуры Земли. В геофизических задачах учитывают также влияние притягивающих масс промежуточного слоя, а при измерениях силы тяжести под водой или под землей — и притяжения масс, лежащих выше точки наблюдения.

На всю территорию России составлены карты аномалий силы тяжести в масштабе 1:1 000 000. Создаются карты в масштабе 1:200 000, а на отдельные регионы — в масштабе 1:50 000. Карты строят способом изолиний. Сечения изоаномал на картах этих масштабов меняются от 5 мГал до 0,25 мГал. Положительные аномалии показывают в теплых желто-красно-коричневых тонах, отрицательные — в холодных сине-зеленых.

Таблица 7.1

Фундаментальные геодезические постоянные GRS 80

Обозначения, размерность	Параметры	Примечания
a , м	6 378 137	Большая полуось
b , м	6 356 752,3141	Малая полуось
α	1/298,257 222 101	Сжатие
GM , $\text{км}^3/\text{с}^2$	3 986 00,5	Гравитационная постоянная
U_0 , $\text{м}^2/\text{с}^2$	6263 6860,850	Потенциал на эллипсоиде
\bar{C}_{20}	-484 166,855 10^{-9}	Гармонический коэффициент
J_2	108 263 10^{-8}	“
J_4	0.000 002 370 912 22	“
J_6	0.000 000 006 083 47	“
J_8	0.000 000 000 014 27	“
ω , рад/с	7292 115 10^{-11}	Угловая скорость Земли
γ_e , $\text{м}/\text{с}^2$	9,780 326 7715	Нормальная сила тяжести на экваторе
γ_p , $\text{м}/\text{с}^2$	9,832 186 3685	Нормальная сила тяжести на полюсе
c , м/с	299 792 458	Скорость электромагнитных волн в вакууме

Уклонения отвеса. Уклонение отвеса — одно из важнейших понятий в геодезии. Уклонения отвеса нужны для ориентирования референц-эллипсоидов, пересчета астрономических широт, долгот и азимутов в геодезические, приведения измеренных углов к значениям, которые будут получены после наклона вертикальной оси теодолита и ориентирования ее по нор-

мали к эллипсоиду, а также для решения других задач по установлению взаимосвязи между точками на физической поверхности и на эллипсоиде.

Различают уклонации отвеса в геометрическом и в физическом определении. Уклонации отвеса в *геометрическом* определении есть угол между направлениями отвесной линии и нормали к эллипсоиду; в *физическом* определении — угол между направлениями действительной и нормальной сил тяжести. Если уклонации отвеса определены по отношению к общеземному эллипсоиду, их называют *абсолютными*, а если по отношению к референц-эллипсоиду, ориентированному лишь на отдельный регион Земли, — *относительными*.

Уклонации отвеса, найденные из сопоставления астрономических и геодезических широт и долгот, называют *астрономо-геодезическими*, а полученные по измерениям аномалий силы тяжести — *гравиметрическими*. Гравиметрические уклонации отвеса всегда абсолютны и в физическом определении; астрономо-геодезические — в геометрическом определении и могут быть как абсолютными, так и относительными. Абсолютные в физическом определении уклонации отвеса вычисляют также по возмущающему потенциальному.

Изменение силы тяжести вызывает непараллельность уровенных поверхностей нормального поля (рис. 7.1). Уровенная поверхность, проходящая на полюсе на высоте 100 м над эллипсоидом, на экваторе находится на 53 см выше. Силовые линии нормального поля обращены вогнутостью к оси вращения эллипсоида. На поверхности уровенного эллипсоида нормальная сила тяжести не постоянна и зависит от широты, она максимальна на полюсе эллипсоида, где достигает значения 983,2 Гал, и минимальна на экваторе, где она равна 978,0 Гал. Наибольшую кривизну силовые линии имеют на широте 45° [11].

На значительную часть России составлены карты, на которых уклонации отвеса отображены со СКП 0,5-1", а в горных районах грубее — 5-7".

Взаимосвязь астрономических и геодезических координат. Допустим, что ось земного эллипсоида параллельна оси вращения Земли, и параллельны плоскости начала отсчета астрономических и геодезических долгот. Из некоторой точки на физической поверхности, как из центра, построим сферу единичного радиуса. Из этой же точки проведем четыре прямые до пересечения их со сферой: линию, параллельную оси вращения Земли, которая пересечет сферу в точке полюса P ; нормаль к эллипсоиду, которая даст на сфере точку n ; направление нормальной силы тяжести γ до пересечения со сферой в точке Z' и направление силы тяжести Земли g до пересечения на сфере в точке астрономического зенита Z^* . Примерный вид этой сферы сверху отображен на рис. 7.1. Отметим, что точки P , n , Z' лежат в плоскости геодезического меридиана долготы L , а точки P , Z^* — в плоскости астрономического меридиана долготы λ . Угол у полюса P между двумя упомянутыми меридианами равен разности долгот ($\lambda - L$).

Сила тяжести в каждой точке направлена по нормали к текущей уровенной поверхности (рис. 7.1). Силовые линии нормального поля — плоские кривые. Они лежат в плоскости геодезического меридиана. Силовые линии реального поля — пространственные кривые. Вектора сил тяжести направлены по касательным к силовым линиям. Из-за кривизны силовых линий нормального гравитационного поля направления сил тяжести γ не совпадут с нормалью к эллипсоиду. Между ними на высоте H над эллипсоидом образуется малый уголок

$$\Delta B'' = 0,171'' H \sin 2B.$$

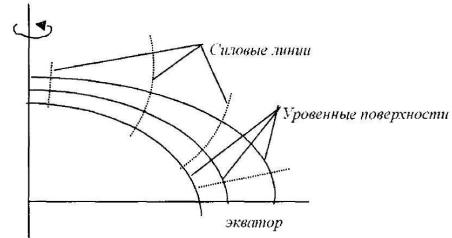


Рис. 7.1. Силовые линии

Высота H выражена в километрах. Угол ΔB на рис. 7.2 соответствует отрезку nZ' .

По определению геодезических и астрономических широт дуга небесной сферы Pn равна $(90 - B)$, а дуга PZ^* — $(90 - \phi)$. Дуга nZ^* соответствует уклонению отвеса u в геометрическом определении, а дуга $Z'Z^*$ — уклонению отвеса u' в физическом определении. Уклонения отвесных линий u' и u раскладывают на составляющие: ξ' и ξ — в плоскости геодезического меридиана и η — в перпендикулярной к меридиану плоскости первого вертикала. При этом составляющая ξ соответствует отрезку дуги nZ_0 (рис. 7.2). Следовательно:

$$\xi = \xi' + \Delta B.$$

Уклонение отвеса u в направлении, заданном азимутом θ , получают, спроектировав на это направление составляющие ξ и η :

$$u = \xi \cos \theta + \eta \sin \theta.$$

Уклонения отвеса — величины малые, большей частью составляют несколько угловых секунд и, вероятно, не превышают $1'$. Из сферического треугольника PZ^*Z_0 с прямым углом у вершины Z_0 , вследствие малости стороны η и угла $(\lambda - L)$, с достаточной точностью получаем:



Рис. 7.2. Взаимосвязь астрономических и геодезических широт и долгот

$$90 - \phi = 90 - B - \xi, \\ \sin \eta = \sin(\lambda - L) \cos \phi.$$

После замены синусов значениями их малых углов следуют выражения для составляющих астрономо-геодезических уклонений отвеса:

$$\xi = \phi - B, \\ \eta = (\lambda - L) \cos \phi.$$

Отсюда следуют формулы для вычисления геодезических широт и долгот по астрономическим координатам:

$$B = \phi - \xi, \\ L = \lambda - \eta / \cos \phi.$$

Опуская промежуточные выводы, приводим формулы связи геодезического A и астрономического a азимутов на некий земной предмет K :

$$A = a - (\lambda - L) \sin \phi + (\eta \cos A - \xi \sin A) \operatorname{ctg} Z,$$

где Z — зенитное расстояние рассматриваемого направления. В астрономический азимут a введены две поправки; первая из них учитывает

влияние на азимут несовпадения плоскостей астрономического и геодезического меридианов, вторая — несовпадения вертикальной оси теодолита с нормалью к эллипсоиду. Поэтому

$$\Delta M = (\eta \cos A - \xi \sin A) \operatorname{ctg} Z$$

является поправкой в измеренные горизонтальные направления за переход с физической поверхности к эллипсоиду.

В равнинной местности зенитные расстояния направлений на земные предметы близки к 90° , поэтому поправки ΔM в большинстве случаев малы, не превосходят $0,05''$. Ими пренеб-

регают, и уравнения взаимосвязи геодезического и астрономического азимутов представляют более простыми формулами:

$$A = a - (\lambda - L) \sin \phi,$$

$$A = a - \eta \tan \phi.$$

Формулы называют *уравнениями Лапласа*, вычисленные по ним геодезические азимуты — *азимутами Лапласа*, а пункты, на которых они определены — *пунктами Лапласа*. Азимуты Лапласа очень важны для правильного ориентирования на местности геодезических сетей.

Системы счета высот. Для определения точек над эллипсоидом используется геодезическая высота (H) — расстояние, отсчитываемое по нормали от поверхности эллипсоида до определяемой точки. Это геометрическая высота, её величина не зависит от силы тяжести.

Однако на Земле все материальные объекты подвержены воздействию силы тяжести. Поэтому в повседневной практике используются не геодезические высоты, а высоты, связанные с силой тяжести. Эти высоты определяются расстояниями, отсчитываемыми от выбранной отсчетной поверхности, обычно расположенной ближе к уровню моря. Строго говоря, высоты следует определять по силовым линиям силы тяжести. Из-за непараллельности уровенных поверхностей высоты точек зависят от пути проложения нивелирного хода. Расстояния от зеркала воды водоёма до отсчётной поверхности у южного края будут большими, чем у его северных границ. Разница в высотах особенно будет ощутимой, если водоём вытянут по меридиану,

При введении системы высот требуется выполнение ряда условий: 1) высоты пунктов должны быть однозначно определимы независимо от трассы нивелирования; 2) высоты должны вычисляться лишь по фактическим измерениям без привлечения каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли; 3) система счета высот должна обеспечивать строгую связь с геодезическими высотами над эллипсоидом.

В разных странах нашли распространение две системы счета высот: *ортометрические высоты*, считаемые от геоида, и *нормальные высоты*, вычисляемые от поверхности эллипсоида. В инженерно-прикладной практике применяется специальная система *динамических высот*.

При определениях высот точек земной поверхности кривизной силовых линий обычно пренебрегают. Полагают, что высоты можно определять по нормалим к эллипсоиду. При высотах до 10 км погрешности по этой причине не превышают 0,01 мм [12, с. 218].

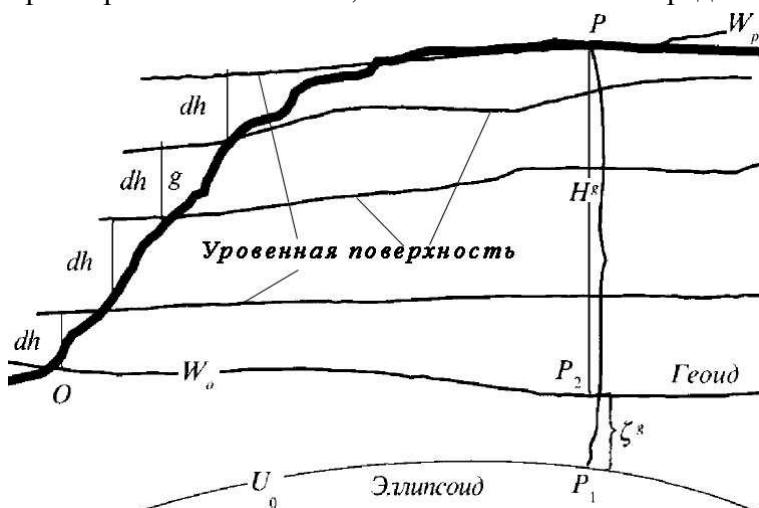


Рис. 7.3. Система счета ортометрических высот

Ортометрические высоты. Название от греч. *orthós* — вертикальный и *metréō* — измеряю. Одна из старейших систем счета высот. На рис. 7.3 отображены физическая (утолщенная линия) и уровенные поверхности реального (W) и нормального (U) потенциалов силы тяжести. Геоид проходит через точку O — начало счета высот. Пусть на физической поверхности по линии OP проложен нивелирный ход и

измерены превышения dh между передними и задними рейками, а также выполнены гравиметрические работы и определены значения силы тяжести g .

Потенциал силы тяжести Земли в точке O равен W_o , а в точке P – W_p . Для анализа систем счета высот воспользуемся дифференциальным уравнением (7.5) зависимости приращения потенциалов dW от разности высот dh двух бесконечно близких уровенных поверхностей. Интегрируя dW по трассе OP , получим уравнение для разности потенциалов между точками O и P :

$$W_p - W_o = \int_{OP} dW = - \int_{OP} g dh.$$

Этот результат не зависит от выбора трассы нивелирования. При перемене знака он соответствует работе, которая должна быть проделана в поле силы тяжести вследствие перемещения единичной массы из точки O в точку P . Обозначим через

$$C_p = \int_{OP} g dh = W_o - W_p,$$

где C_p называют *геопотенциальной величиной* (геопотенциальным числом). Она участвует в определениях высот любой системы. Геопотенциальная величина может быть представлена следующим образом:

$$C_p = \int_{OP} g dh = \int_{OP_{2c}} g dh + \int_{P_2P} g dh = \int_{P_2P} g dh = g_m H^s,$$

где интеграл по линии OP_2 равен нулю, так как эта линия лежит на геоиде, g_m – среднее интегральное значение силы тяжести на отрезке P_2P . Отрезок P_2P направлен не по силовой линии, а по нормали к эллипсоиду. Его называют *ортометрической высотой*. Имеем:

$$H^s = \frac{C_p}{g_m} = \int_{OP} dh + \int_{OP} \frac{(g - g_m)}{g_m} dh = H^P + f^s.$$

В данной формуле ортометрическая высота представлена суммой *измеренной* по результатам нивелирования высотой H^P и добавкой к ней f^s .

На рис. 7.3 ζ^s соответствует отрезку P_1P_2 нормали к эллипсоиду и является высотой геоида над эллипсоидом. Её можно рассматривать как в реальном, так и в нормальном поле [11, с. 202]:

$$\zeta^s = \frac{W_{P_1} - W_o}{g_m^{(P_1P_2)}}, \quad \zeta^s = \frac{U_o - U_{P_2}}{\gamma_m^{(P_1P_2)}}.$$

Как следует из рис. 7.3, геодезическая высота определяется отрезком нормали к эллипсоиду P_1P и является суммой ортометрической высоты и высоты геоида:

$$H = H^s + \zeta^s. \quad (7.10)$$

Геометрически ясное понятие ортометрической высоты оказывается строго нереализуемым. Высоты (7.10) принципиально не определимы по измерениям на физической поверхности Земли; приходится использовать ту или иную гипотезу строения земной коры.

“Ортометрическая высота хороша для неспециалистов. Это высота над уровнем моря, которую каждый может себе вообразить, не вдаваясь в точное определение понятия уровня моря. Но геодезия – наука точная, и здесь нельзя ограничиться интуитивными представлениями ...” [10].

Нормальные высоты. На основании формулы (7.6) для потенциалов силы тяжести реального и нормального полей точки M имеем (7.4):

$$W_M = U_M + T_M.$$

Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$W_M - W_0 = U_M - U_0 + T_M - (W_0 - U_0) = -C_M,$$

где W_0 и U_0 — значения потенциалов силы тяжести соответственно на геоиде и на эллипсоиде. Отсюда:

$$U_0 - U_M = C_M + T_M + (U_0 - W_0).$$

Представим данное выражение следующим образом:

$$U_0 - U_M = (U_0 - U_{M^\gamma}) + (U_{M^\gamma} - U_M).$$

Потенциал сферопа точки M_γ равен (рис. 7.4):

$$U_{M^\gamma} = U_0 - C_M.$$

Очевидно,

$$(U_{M^\gamma} - U_M) = T_M + (U_0 - W_0).$$

Разделим эти разности потенциалов на средние интегральные значения нормальной силы тяжести γ_m , γ_m' , γ_m'' , вычисленные соответственно на отрезках $M_e M$, $M_e M_\gamma$ и $M_\gamma M$:

$$\frac{U_0 - U_M}{\gamma_m} = \frac{(U_0 - U_{M^\gamma})}{\gamma_m'} + \frac{(U_{M^\gamma} - U_M)}{\gamma_m''}.$$

Каждый член данного выражения имеет смысл высоты: слева от знака равенства *геодезическая* высота H , справа — сумма *нормальной* H^γ и *аномальной* ζ высот:

$$H = H^\gamma + \zeta.$$

При этом:

$$H = \frac{U_0 - U_M}{\gamma_m},$$

$$H^\gamma = \frac{C_M}{\gamma_m} = H^M + f^\gamma,$$

$$\zeta = \frac{T_M + (U_0 - W_0)}{\gamma_m}.$$

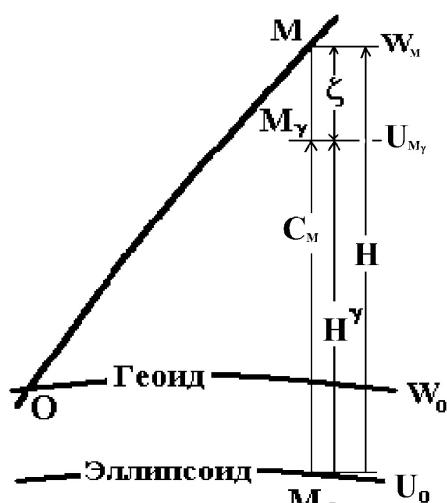


Рис. 7.4. Система счета нормальных высот

Средние интегральные значения нормальной силы тяжести легко вычислить на основании (7.9) по формуле

$$\gamma_m = \frac{1}{H} \int_0^H \gamma dH = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial H} \frac{H}{2}.$$

Геодезическая высота H , как уже отмечалось, в современных условиях может быть определена по измерениям спутниковыми системами позиционирования.

Нормальная высота для удобства вычислений преобразована: выделена измеренная геометрическим нивелированием высота H^M и поправка к ней f^γ за непараллельность уровенных поверхностей нормального поля силы тяжести и за аномалии силы тяжести [6].

Все высоты могут быть определены строго лишь по измерениям на физической поверхности без привлечения каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли.

Практически нормальные высоты определяют по реперам с известными отметками. Нормальная высота в точке r по отношению к высоте в точке p вычисляется по формулам [14]:

$$H_r^\gamma = H_p^\gamma + h + f,$$

$$f = -\frac{1}{\gamma_m} (\gamma_0^r - \gamma_0^p) \times H_m + \frac{1}{\gamma_m} (g - \gamma)_m \times h.$$

В формулах h – измеренное нивелирное превышение между реперами, H_m – средняя высота реперов, $(g - \gamma)_m$ – среднее из аномалий силы тяжести в точках p и r .

Если потенциал на уровенном эллипсоиде равен потенциалу на геоиде, $U_0 = W_0$, то выражение для аномалий высот упрощается; опуская индексы, получаем формулу Г. Брунса:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}.$$

Нормальные высоты, отложенные по нормалям от эллипсоида, в совокупности образуют поверхность, которую называют Землей *первого приближения* или *тетраподом*.

Возможна иная интерпретация. Отложим нормальные высоты по нормалям вниз от точек физической поверхности. Получим новую, близкую к геоиду поверхность — *квазигеоид*. Соответственно аномалии ζ станут *высотами квазигеоида*.

Отступления квазигеоида от геоида равны разности нормальных и ортометрических высот:

$$H^\gamma - H^g = \frac{C_M}{\gamma_m} - \frac{C_M}{g_m} = \frac{(g_m - \gamma_m)}{g_m} H^\gamma.$$

На высотах $H^\gamma = 0$ эта разность равна нулю; при значениях $(g_m - \gamma_m) = 50$ мГал, $H^\gamma = 500$ м — разности составляют около 2,5 см. Таким образом, на морях геоид и квазигеоид совпадают. На равнинах отступления квазигеоида от геоида составляют несколько сантиметров. Наибольшие расхождения этих двух поверхностей, доходящие до 2 метров, могут иметь место на высокогорных плато. Высоты квазигеоида обязательны для установления взаимосвязи нормальных и геодезических высот.

Теория нормальных и аномальных высот разработана в 40-е годы М.С. Молоденским (1909 -1991). Главным преимуществом нормальных и аномальных высот является то, что их можно строго и однозначно определить лишь по измерениям на физической поверхности Земли.

Динамические высоты. Ортометрические и нормальные высоты не остаются постоянными у берегов протяженных, вытянутых по меридиану, водоемов. Следует отметить, что нормальные высоты, в отличие от ортометрических высот, изменяются лишь с изменением широты. Однако эти изменения могут быть значительными. Так, например, у озера Байкал максимальная разность нормальных высот составляет 165 мм. Это обстоятельство затрудняет расчеты, связанные с проектированием гидротехнических сооружений.

Для удобства выполнения гидротехнических расчетов вводят так называемые *динамические высоты*, имеющие одинаковые значения для одной и той же уровенной поверхности. Их вычисляют по формуле:

$$H^\partial = \frac{C_M}{\gamma_d},$$

В качестве γ_d принимают значение силы тяжести для средней широты изучаемого района или постоянное значение для широты 45° . Динамические высоты по величине значительно отличаются от ортометрических и нормальных.

Способы определения высот квазигеоида. Проблема определения аномалий высот представляет научный и практический интерес. Зная нормальные высоты H' и высоты квазигеоида ζ , можно вычислить геодезические высоты H . ГНСС позволяют решать обратную задачу – получать нормальные высоты H' по геодезическим высотам H и высотам квазигеоида ζ . Эти геодезические работы называют *спутниковым нивелированием*. Спутниковое нивелирование уже пригодно для работ от технического нивелирования до нивелирования III класса точности. Имеются публикации, где сообщается об определениях превышений II класса точности с ошибкой ± 2 мм/км [18].

Существует ряд способов определения высот квазигеоида [15].

1. *Астрономическое нивелирование*; выполняется по астрономо-геодезическим уклонениям отвеса. Дифференциальная формула астрономического нивелирования имеет вид:

$$d\zeta = -\vartheta' ds,$$

где ϑ' составляющая уклонения отвеса в физическом определении (в радианах), ds – элементарный отрезок пути. Интегрируя по некоторой нивелирной трассе AB , находят:

$$\Delta\zeta_{AB} = - \int_{AB} \vartheta' ds.$$

Относительные астрономо-геодезические уклонения отвеса известны лишь на астропунктах, которые в государственных геодезических сетях России были размещены через 70 - 100 км. Поэтому при вычислениях приходилось предполагать, что уклонения отвеса на расстоянии S_{AB} между пунктами изменяются *линейно* и решать интеграл численно по формуле:

$$\zeta_B - \zeta_A \approx -\frac{\vartheta'_A + \vartheta'_B}{2} S_{AB},$$

2. *Гравиметрический способ*. Способ основан на формуле Д.Г. Стокса и измерениях аномалий силы тяжести в свободном воздухе. Строго говоря, гравиметрические данные должны быть известны по всей планете.

3. *Астрономо-гравиметрическое нивелирование*. Способ предложен М.С. Молоденским в 1937 г. Он объединяет сильные стороны двух предыдущих способов: редкая сеть астрономических данных дополняется гравиметрическими измерениями. Пусть определены гравиметрические высоты квазигеоида ζ и гравиметрические составляющие уклонений отвеса $\bar{\vartheta}$. По аналогии с формулой астрономического нивелирования можно записать:

$$\bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A = -\frac{\bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_B}{2} S_{AB}.$$

Отсюда следует формула:

$$\zeta_B - \zeta_A = -\frac{\vartheta'_A + \vartheta'_B}{2} S_{AB} + (\bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A + \frac{\bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_B}{2} S_{AB}).$$

Выражение в скобках называют *гравиметрической поправкой*. Она учитывает нелинейность изменений уклонений отвеса между пунктами и этим повышает точность астрономо-гравиметрического нивелирования до нескольких сантиметров на 1 км хода.

4. *Гравиинерциальный метод*, основан на непосредственных высокоточных, с точностью $\sim 0,1''$, измерениях приращений астрономо-геодезических уклонений отвесных линий при перемещении от одного пункта к другому. По измеренным приращениям уклонений отвесных линий и известным расстояниям между пунктами вычисляются превышения квазигеоида

(геоида). Метод эффективен и точен для изучения поверхности квазигеоида (геоида) особенно в континентальной части земного шара [3].

5. Использование моделей возмущающего потенциала, когда высоты квазигеоида представляют в функции гармонических коэффициентов:

$$\zeta = \frac{GM}{\gamma\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \left(\bar{C}_{nm} \cos(mL) + \bar{S}_{nm} \sin(mL) \right) \bar{P}_{nm}(\sin \Phi).$$

В формуле \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} - безразмерные нормированные гармонические коэффициенты степени n и порядка m . Первый из них обозначает разность между соответствующими коэффициентами в формулах для вычислений потенциалов притяжения реальной и нормальной Земли. Чем больше числа n и m , тем детальнее описание гравитационного поля. Чтобы обеспечить надлежащую точность, надо суммировать слагаемые с коэффициентами высоких степеней и порядка. Даже при коэффициентах до 200 степени и порядка средняя квадратическая погрешность в высоте составляет 1,5 - 2 м. При этом объём вычислений резко возрастает. Когда степень и порядок n , то ряд содержит слагаемых

$$n(n+3)-4.$$

Если $n = 200$, то придется суммировать 40 596 членов.

Положение точки, в которой вычисляется высота ζ , определяет радиус-вектор ρ , геоцентрическая широта Φ и долгота L .

6. Способ спутниковой альтиметрии выполняется над морем по спутниковым радиовысотометрическим измерениям и основан на соотношении:

$$\zeta = H_{\text{выч}} - H_{\text{изм}} + \Delta h,$$

где $H_{\text{изм}}$ — измеренная высота спутника над морской поверхностью, $H_{\text{выч}}$ — вычисленная геодезическая высота спутника над эллипсоидом, Δh — сумма поправок в измерения за влияния погрешностей аппаратуры высотометра, внешней среды, отличия морской поверхности от уровенной, за высоту морских волн и др. Реальная точность определения высот квазигеоида (геоида) характеризуется СКП около дециметра.

7. Геодезический способ, основан на использовании ГНСС для определения геодезических высот H , а также наземных нивелирных и гравиметрических измерений для нахождения нормальных высот H' и вычисления высот квазигеоида по формуле

$$\zeta = H - H'.$$

8. Интерполяционный способ, когда аномалии высот вычисляют, интерполируя данные с геодезических пунктов, на которых известны нормальные и геодезические высоты.

9. Определение аномалий высот по гравитационным моделям и картам квазигеоида.

10. Комбинированные способы. Высоты квазигеоида вычисляют, комбинируя доступные всевозможные способы. В ближней зоне используют наземные гравиметрические данные вокруг исследуемого пункта и высоты вычисляют по интегральной формуле Д.Г. Стокса. Для учета влияния дальних зон применяют ряды с гармоническими коэффициентами. Дополнительно привлекают результаты измерений спутниковыми системами позиционирования и данные спутниковой альтиметрии над акваториями.

Определение нормальных высот спутниковым нивелированием. По координатам X, Y, Z , найденным посредством ГНСС измерений, можно определить геодезические высоты H (раздел 6), а по ним вычислить нормальные высоты H' :

$$H' = H - \zeta,$$

где ζ – аномалии высот. Такой метод определения нормальных высот называют *спутниковым нивелированием*. Таким образом, для вычисления нормальных высот по геодезическим высотам нужны гравиметрические определения, карты или модели аномалий высот.

Аномалии высот изменяются с увеличением расстояний между пунктами. Неучет этих изменений ведет к погрешностям в передаче нормальных высот. Приближенно можно полагать, что с каждым километром аномалия ζ изменяется на 1–2 см. При расстояниях между пунктами 50 км эти погрешности могут составить дециметры и даже превысить 1 м.

Рассмотрим несколько подходов к решению задачи спутникового нивелирования.

1. Способ Гаусса. На некотором участке имеется n опорных пунктов с известными нормальными высотами H' и геодезическими высотами H_{GPS} . Алгоритм пересчета следующий.

- Определяются веса измерений $P_i = (1/S_i)^q$, где S_i – расстояние от текущей определяемой точки до i -го опорного пункта с известными высотами. Степень $q \geq 0$ (подбирается экспериментально).
- Вычисляется нормальная высота определяемого пункта по формуле *среднего весового*:

$$H' = H_{GPS} + \sum (H' - H_{GPS})_i P_i / \sum P_i.$$

Представление о точности алгоритма Гаусса можно получить по исследованиям в работе [1]: на участке площадью 20км × 20км по четырём опорным пунктам, при $q = 2$, определены нормальные высоты трёх пунктов с ошибками -2, -7 и -13 мм. Точность способа зависит от числа опорных пунктов и равномерности их распределения на участке. Степенью q регулируется влияние отдалённых пунктов – чем степень больше, тем меньше вес этих пунктов.

Очевидно, что способ можно применять к определению не только нормальных высот, но и любых, созданных в локальной системе высот.

2. Способ формирования *поверхности аномалий высот* с использованием интерполяционных формул. В этом случае измерения спутниковой системой выполняются не только на определяемых пунктах, но и на опорных пунктах, нормальные высоты которых уже известны. Это дает возможность на опорных пунктах вычислить аномалии высот ζ и интерполировать их на искомые пункты. Интерполяционная функция формирует некоторую поверхность аномалий высот в локальной системе плоских прямоугольных координат (x, y) :

$$\zeta = f(x, y).$$

Интерполяционной функцией часто служат полиномы не выше второй степени, например:

$$\zeta = Ax + By + Cxy + D,$$

где x, y – плоские прямоугольные координаты, A, B, C, D – искомые коэффициенты. Если эти коэффициенты известны, тогда можно вычислять аномалии высот. Чтобы их найти, необходимо иметь не менее 4-х значений ζ . Если их более 4, следует составить уравнения поправок

$$v_i = Ax_i + By_i + Cx_i y_i + D - \zeta_i,$$

и решить систему нормальных уравнений:

$$A^T A K - A^T L = 0,$$

где A – матрица, i -ая строка которой содержит величины $x_i, y_i, x_i y_i, 1$; вектор $K = (A, B, C, D)^T$ – включает искомые параметры; $L = (\zeta_1, \dots, \zeta_i, \dots)^T$ – вектор исходных значений аномалий высот. Опорные пункты с известными нормальными высотами должны быть равномерно распределены по участку работ или, по крайней мере, находиться в его середине и на краях. Рекомендуют, чтобы определяемый пункт опирался на пять или большее число опорных пунктов [7].

В публикации [22] дан анализ способов построения поверхностей аномалий высот; при этом рассматривались разные интерполяционные функции, соответствующие по точности требованиям нивелировок IV класса.

3. Способы, основанные на образовании разностей высот двух пунктов. Для нормальных высот двух точек A и B можно записать:

$$H_A^\gamma = H_A - \zeta_A,$$

$$H_B^\gamma = H_B - \zeta_B.$$

Из этих формул получают:

$$H_B^\gamma = H_A^\gamma + (H_B - H_A) - (\zeta_B - \zeta_A).$$

Для вычисления нормальной высоты пункта B по нормальной высоте пункта A надо знать разности геодезических высот и аномалий высот этих пунктов. Пути решения различны [1, 8 и др.]. Для учета изменений аномалий высот могут быть использованы полиномы, как правило, не выше второй степени, или углы наклона поверхностей квазигеоида и земного эллипсоида.

При расстояниях между пунктами до 10 км участки эллипсоида и квазигеоида приближённо заменяются плоскостями, и учитывается либо угол наклона плоскости эллипсоида к плоскости квазигеоида, либо два угла наклона - вдоль оси x и вдоль оси y . Рассмотрим подробнее второй способ, следуя публикации [1].

Используя максимально разнесённые на участке пункты по оси x и по оси y , вычисляют градиенты изменений аномалий высот по направлениям этих осей:

$$G_x = [(H_{x \max}^\gamma - H_{x \min}^\gamma) - (H_{x \max} - H_{x \min})] / (x_{\max} - x_{\min}),$$

$$G_y = [(H_{y \max}^\gamma - H_{y \min}^\gamma) - (H_{y \max} - H_{y \min})] / (y_{\max} - y_{\min}).$$

Нормальная высота точки B по нормальной высоте пункта A вычисляется по формуле:

$$H_B^\gamma = H_A^\gamma + (H_B - H_A) + \frac{1}{\sqrt{2}} [G_x (x_B - x_A) + G_y (y_B - y_A)].$$

На упоминавшемся выше участке площадью $20\text{км} \times 20\text{км}$ по четырём опорным пунктам определены указанным способом нормальные высоты трёх пунктов с ошибками -4, -2 и +1 мм. Авторы статьи [1] отмечают, что способ градиентов вдоль осей x и y значительно проще способов, использующих интерполяционные полиномы, и при расстояниях до 10 км спутниковое нивелирование может выполняться с точностью не хуже технического нивелирования. Способ успешно был внедрён в практику работ вдоль скоростной Октябрьской железной дороги Москва – Санкт-Петербург.

4. Способы, основанные на применении гравитационных моделей Земли (EGM). В настоящее время такие модели рассчитываются по формулам с гармоническими коэффициентами очень высокой степени и порядка. Известна модель *EGM-96*, разработанная Годдарским центром космических полётов *NASA GSFC*, Национальным агентством по космическим изображениям и картографированию *NIMA* и Университетом штата Огайо *OSU*. При её построении использовано более 60 тыс. гармонических коэффициентов [21, 25].

Национальной службой геопространственной разведки США *NGA* подготовлена новая гравитационная модель Земли *EGM-2008*; при её разработке использованы гармонические коэффициенты до 2159-й степени и порядка [19, 20]. Число членов ряда с ростом степени и порядка гармонических коэффициентов увеличивается по арифметической прогрессии, и в этой модели это число составило 2 333 877. Дополнительно использованы коэффициенты до

2190 степени и до 2159 порядка. Карта модели *EGM*-2008 дана в работе [24]. СКО высот геоида по земному шару составляет 20-25 см.

Российскими специалистами создан ряд моделей гравитационного поля Земли [9]. В 2008 г. работы выполнены сотрудниками ГАО-98, ЦНИИГАИК и 29 Института МО РФ [4].

В работе [2] выполнен анализ определения нормальных высот по спутниковым наблюдениям. Рассмотрены модель *EGM*-96 с шагом матрицы значений по широте и долготе 15'x15' и модель *EGM*-2008 с шагом 10'x10', 2,5'x2,5' и 1'x1'. Вычисления велись по формуле:

$$H' = H_{WGS-84} - \zeta_g - h,$$

где H' - нормальная высота в Балтийской системе высот 1977 г, H_{WGS-84} - геодезическая высота над эллипсоидом *WGS-84*, ζ_g - высота геоида *EGM* над эллипсоидом *WGS-84*, h - превышение геоида *EGM* над квазигеоидом в Балтийской системе высот 1977 г. Модель *EGM*-2008 продемонстрировала удовлетворительные результаты во всех оцениваемых вариантах. В большинстве случаев лучшую сходимость вычисленных нормальных высот с их значениями в каталогах продемонстрировали модели *EGM*-2008 с шагом значений 2,5'x2,5' и 1'x1'. Отметки высот, определяемые по этой технологии, соответствуют требованиям нивелировок III и IV классов точности.

В работе [13] отмечается, что практически доказана возможность по результатам спутниковых наблюдений и модели *EGM*-2008 передавать нормальные высоты на расстояния 10–30 км с погрешностью не хуже 10 см.

Другой путь - использование *модельных аномалий высот* ζ_m и поправок к ним $\delta\zeta$:

$$H' = H - (\zeta_m + \delta\zeta).$$

Для нахождения поправок используются опорные пункты, на которых известны нормальные высоты, определены при помощи ГНСС геодезические высоты и вычислены модельные аномалии высот. На этих опорных пунктах поправки вычисляются по формуле:

$$\delta\zeta = H - H' - \zeta_m.$$

Поправки на определяемых пунктах вычисляются при помощи интерполяционной функции $f(x, y)$, аргументами в которой являются плоские прямоугольные координаты x, y . Для определения параметров интерполяционной функции МНК следует составить для каждого опорного пункта уравнение поправок вида:

$$v_i = f_i(x, y) - \delta\zeta_i.$$

Линейный полином, с частичным удержанием элементов полинома второй степени, использован для определения нормальных высот пунктов морской уровенной сети в акватории Финского залива; высоты получены со СКО = 27 мм [16].

Общеземная система счёта высот. На Земле действует несколько вертикальных систем с разными потенциалами W_0 силы тяжести в исходных пунктах. Нули всех исходных пунктов связаны с уровнями разных морей и в целом близки к среднему уровню океанов, но это разные системы. Мировая общественность работает в направлении теоретического и практического развития единой *Глобальной вертикальной отсчётной основы* - *GVRF*. Разработана методика реализации такой системы на основе региональных вертикальных отсчетных основ Северной Америки *NAVD*-88, Австралии *AHD* 71, Франции Национального географического института *IGN* 69 и Бразилии *BHD* 57. Вертикальные сдвиги упомянутых высотных систем отнесены к принятому значению геопотенциала $W_0 = 62\ 636\ 856,0 \pm 0,5\ \text{м}^2/\text{с}^2$, и определены на уровне точности 5 см [17].

В РФ разработана теория введения единой глобальной системы нормальных высот [5].

В рассматриваемом случае фиксированный, закрепленный исходный пункт, в котором нормальная высота равна нулю, отсутствует. Систему счёта высот определяет совокупность

геодезических пунктов, в которых известны геодезическая высота H по спутниковым данным, нормальная высота H' по нивелирным измерениям и аномалия высоты ζ по гравиметрическим данным.

Источники информации Лекции 7

1. Баландин В. Н., Меньшиков И. В., Штерн С. Л. К вопросу определения нормальных высот точек для локальных объектов на основе спутникового нивелирования // Геодезия и картография. 2012. № 10. С.17-21.
2. Вдовин А. И., Мурзинцев П. П., Титов С. С. Выбор модели квазигеоида при создании опорной геодезической сети // Геодезия и картография. 2009. № 11. С. 16-19.
3. Геодезия. Понятие о редукционной задаче. <http://geodetics.ru/reduktzadacha.html> (Дата обращения 13.07.2014)
4. Демьянов Г. В., Майоров А. Н., Побединский Г. Г. Вопросы построения государственной системы координат Российской Федерации // Геодезия и картография. 2011. № 11. С. 17–25.
5. Демьянов Г. В., Майоров А. Н., Юркина М. И. Построение общеземной системы нормальных высот // Геодезия и картография. 2009. № 1. С. 12-16.
6. Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов. М.: Недра. 1990. -168 с.
7. Ложкин А. О., Ходаков П. А. Исследование стабильности геодезических центров в районе вечной мерзлоты // Геодезия и картография. 2012. № 3. С.21-26.
8. Непоклонов В. Б., Чугунов И. П., Яковенко П. Э., Орлов В. В. Новые возможности развития сети нормальных высот на территории России // Геодезия и картография. 1996. № 7. С. 20-22.
9. Непоклонов И. Б. Использование методов космической геодезии для изучения планетарного геоида. (Дата обращения 13.07.2014) <http://www.credo-dialogue.com/getattachment/acadabfe-85e6-4eec-b195-88ae886cbd20/Ispolzovanie-methods.aspx>
10. Огородова Л.В. Теория Молоденского и геоид // Геодезия и картография. 2013. № 8. С. 1-7.
11. Огородова Л.В. Высшая геодезия. Часть 3. Теоретическая геодезия: Учебник для вузов. М.: Геодезкартиздат. 2006. - 384 с.
12. Огородова Л. В., Шимбиров Б. П., Юзефович А. П. Гравиметрия. –М.: Недра, 1978, - 325 с.
13. Рудницкая Н. И. Определение параметров связи Международной общеземной системы отсчета и Государственной системы отсчета координат Республики Беларусь. (Дата обращения 13.07.2014). <http://www.credo-dialogue.com/getattachment/2c68454e-cb1f-4d2d-9aeb-e734915a71a5/Opredelenie-parametrov-cvjazi.aspx>
14. Руководство пользователя по выполнению работ в системе координат 1995 года (СК-95). Издание официальное. –М.: ЦНИИГАиК, 2004. –138 с.
15. Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт: Учебное пособие. –М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2001. –133 с.
16. Шануров Г. А., Остроумов Л. В., Розанова А. А. Повышение точности определения нормальных высот, полученных на основе использования глобальных навигационных спутниковых систем // Известия ВУЗ. Геодезия и аэрофотосъемка. –М. МИИГАиК. 2009. № 4. С. 30-36. <http://miigaik.ru/journal.miigaik.ru/2009/20091201183035-6261.pdf>
17. Burša M. et al. A Global Vertical Reference Frame Based on Four Regional Vertical Datums. <http://www.springerlink.com/content/t23g447131178up1/>
18. Cacon S., Bosy J., Kontny B. The GPS levelling network in the conurbation of Wroclaw. Artificial Satellites, Vol. 34, No 3. 1999, p. 163–170.
19. Earth Gravitational Model 2008 (EGM 2008). (Дата обращения 13.07.2014) <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/index.html>
20. EGM 2008 – WGS 84 Version. (Дата обращения 13.07.2014) http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html
21. Geoid Map. <http://www.usna.edu/Users/oceano/pguth/website/so432web/GeoidMap.htm> (Дата обращения 13.07.2014)
22. Guo Jin-yan, Chang Xiao-tao, Yue Qiang. Study on curved surface fitting model, using GPS and leveling in local area / Trans. Nonferrous Met. Soc. China. 2005, Mar. Vol. 15, Special 1, pp. 140-144.

-
- 23. Moritz. H. GEODETIC REFERENCE SYSTEM 1980. [Электронный ресурс]. (Дата обращения 10.07.2014). URL: <http://geodeticscience.org/course/refpapers/00740128.pdf>
 - 24. Scheingraber Chris. Introduction to the Geoid. October 21, 2009. http://www.archive.scheingraber.net/files/geoid_final.pdf
 - 25. The Earth's Geoid. http://principles.ou.edu/earth_figure_gravity/geoid/index.html (Дата обращения 13.07.2014)

Контрольные вопросы

- 1. Какой геометрический и физический смысл потенциалов силы тяжести Земли?
- 2. Что понимают под геоидом?
- 3. Какую форму имеют уровенные поверхности и как изменяются расстояния между двумя смежными уровнями поверхностями?
- 4. Что такое нормальная Земля, нормальный и аномальный потенциалы силы тяжести и как их определяют?
- 5. Какими гармоническими коэффициентами определяется потенциал силы притяжения реальной Земли и уровенного эллипсоида?
- 6. Что определяют фундаментальные геодезические постоянные?
- 7. Как взаимно связаны астрономические и геодезические широты, долготы и азимуты?
- 8. Анализ и сравнение ортометрических и нормальных высот.
- 9. Спутниковое нивелирование.